Problemi

Problema 1)

1) Siccome la funzione $f(x)$ è una retta, l'espressione cercata è $f(x) = 1-x$ che soddisfa le condizioni a), b) e c) richieste. Per riflessione rispetto all'asse y, all'asse x e all'origine O la retta $x+y=1$ diventa $-x+y=1$, $x-y=1$ e $-x-y=1$, rispettivamente. L'equazione cartesiana della curva Λ è quindi data da $|x|+|y|=1$.

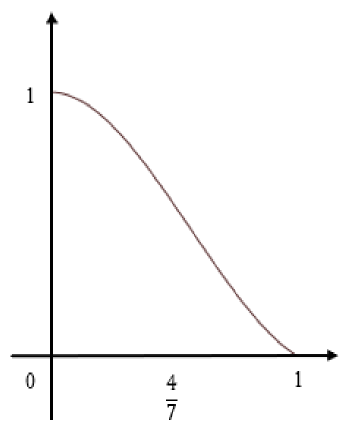
2) Sia $f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ la forma generica. Imponiamo le condizioni richieste: $f(0)=1$ allora $d=1$; $f'(0)=0$ allora $c=0$; $f(1)=0$ allora $a+b=-1$. Abbiamo quindi che $f(x)$ ha la forma $f(x) = ax^3-(1+a)x^2+1$. Affinché l'area della parte colorata sia pari a $\frac{55}{100}$ di 4, che è l'area dell'intera mattonella, imponiamo che

$$4\int_0^1 [ax^3-(1+a)x^2+1]dx = a - \frac{4}{3}(1+a)+4 = \frac{55}{100}\times 4 = \frac{11}{5}$$

e quindi $a=\frac{7}{5}$. Ovviamente questo prova che un polinomio $f(x)$ di secondo grado (ossia con $a=0$) non puó soddisfare tutte le condizioni richieste e che il polinomio di terzo grado cercato è

$$f(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{12}{5}x^2+1.$$

Per studiare l'andamento qualitativo della funzione, determiniamo $f'(x) = \frac{3}{5}(7x-8)x$ e $f''(x) = \frac{6}{5}(7x-4)$. Dallo studio del segno della derivata prima si deduce che $\frac{3}{5}(7x-8)x > 0$ per $x<0$ oppure $x > \frac{8}{7}$, e quindi la funzione risulta essere decrescente in $[0,1]$. Studiamo ora il segno della derivata seconda $\frac{6}{5}(7x-4) > 0$ per $x > \frac{4}{7}$, e quindi la funzione ha il seguente andamento qualitativo:



3) E' di immediata verifica che le funzioni a_n e b_n soddisfano le condizioni a), b) e c). Abbiamo che

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = 4\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 [1-x^n]dx = 4\lim_{n\to+\infty}[1-\frac{1}{n+1}] = 4$$

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = 4\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 (1-x)^n dx = 4\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Siccome x^n diventa sempre piú piccolo al crescere di n per tutti gli x in $[0,1]$ eccetto $x=1$, per $n >> 1$ abbiamo che la funzione a_n parte dal valore 1 in $x=0$, diventa piú piccola di 1 ma molto vicina a 1 per tutti i punti leggermente discosti da $x=1$ e poi scende molto rapidamente al valore 0 in $x=1$. Quindi la parte colorata nel caso di $a_n(x)$ tende ad invadere tutta la mattonella che ha area 4.
Al contrario, $(1-x)^n$ diventa sempre piú piccolo al crescere di n per tutti gli x in $[0,1]$ eccetto $x=0$, e quindi per $n >> 1$ abbiamo che la funzione b_n parte dal valore 1 in $x=0$, scende molto rapidamente fino a valori positivi molto piccoli e poi rimane piccola per tutti i punti leggermente discosti da $x=0$. Quindi la parte colorata nel caso di $b_n(x)$ tende a sparire.
4) Il punto di intersezione tra la diagonale $y=x$ e $a_2(x)$, $b_2(x)$ è $P_1=(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{\sqrt{5}-1}{2})$, $P_2=(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2})$ rispettivamente, ottenuti risolvendo $x=1-x^2$ e $x=(1-x)^2$ per $0<x<1$. Abbiamo quindi che

$$\overline{OP_1}=\sqrt{3-\sqrt{5}},\qquad \overline{OP_2}=\sqrt{7-3\sqrt{5}}$$

mentre la lunghezza della semi-diagonale da O a $(1,1)$ è $\sqrt{2}$. La probabilitá p che una mattonella venga macchiata è data dalla probabilitá di errore $\frac{1}{5}$ della macchina moltiplicata per la probabilitá q_1, q_2 che la goccia cada su una delle semi-diagonali al di fuori di OP_1, OP_2, rispettivamente, ossia

$$q_1=\frac{\sqrt{2}-\overline{OP_1}}{\sqrt{2}},\qquad q_2=\frac{\sqrt{2}-\overline{OP_2}}{\sqrt{2}}.$$

Il numero atteso N di mattonelle macchiate nell'ordine del cliente è

$$N=5000[\frac{1}{5}q_1+\frac{1}{5}q_2]=1000\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3-\sqrt{5}}-\sqrt{7-3\sqrt{5}}}{\sqrt{2}}.$$

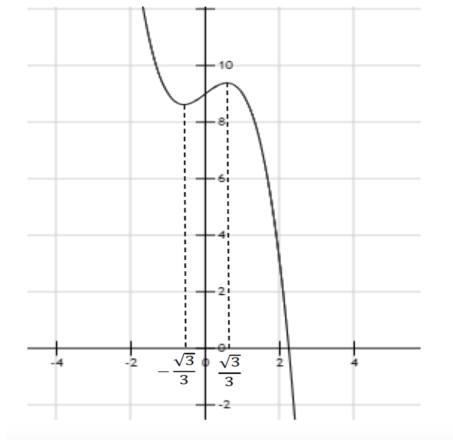
Problema 2)
1) La tangente al grafico di $f_k(x)$ nel punto di ascissa x_0 è la retta di equazione $y=f_k(x_0)+f_k'(x_0)(x-x_0)$. Scegliendo $x_0=0$ e $x_0=1$ otteniamo che

$$r_k:\ y=9+kx,\qquad s_k:\ y=(k-3)x+11.$$

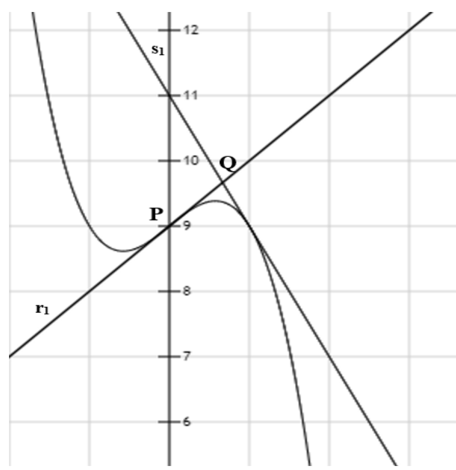
Per determinare l'ascissa di M, studiamo l'equazione $9+kx=(k-3)x+11$ che ammette come unica soluzione $x=\frac{2}{3}$ indipendentemente dal valore di k, verificando l'affermazione del punto 1).
2) L'ordinata di M è $f_k(\frac{2}{3})=9+\frac{2}{3}k$, che risulta essere minore di 10 per $k<\frac{3}{2}$. Abbiamo quindi verificato che il piú grande intero k tale che l'ordinata di M sia minore di 10 è $k=1$. Per descrivere l'andamento qualitativo di $f_1(x)=-x^3+x+9$, osserviamo che

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp\infty,\quad f_1'(x)=-3x^2+1>0 \text{ in } (-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}),\quad f_1''(x)=-6x>0 \text{ in } (-\infty,0).$$

Abbiamo quindi $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ è un punto di minimo locale per f con valore $f(-\frac{\sqrt{3}}{3})=9-\frac{2}{9}\sqrt{3}$, mentre $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ è un punto di massimo locale con $f(\frac{\sqrt{3}}{3})=9+\frac{2}{9}\sqrt{3}$. Siccome il punto $x=0$ è un punto di flesso di f con retta tangente proprio r_1, abbiamo il seguente andamento qualitativo per $f_1(x)$:



3) Per convessitá la funzione f_1 giace al di sopra di r_1 in $(-\infty, 0)$. Per concavitá f_1 invece giace sempre al di sotto sia di r_1 che s_1 in $(0, +\infty)$ con unici punti di contatto in $(0, 9)$ con r_1 e in $(1, 9)$ con s_1, vedi la seguente figura:



Il triangolo T ha vertici $A = (-9, 0)$, $B = (\frac{11}{2}, 0)$ e $M = (\frac{2}{3}, \frac{29}{3})$. Sia

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{9}{2} + \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{9}{2} - \sqrt{\frac{81}{4} + \frac{1}{27}}} \in (1, \frac{11}{2})$$

l'unica radice di $f_1(x) = 0$, ottenuta esplicitamente dalla formula risolutiva per le equazioni di terzo grado. Indicando con $S = \{(x, y) \in T : \; y > f_1(x)\}$, abbiamo che $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, ove

$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [0, \frac{2}{3}), \; f_1(x) < y < 9+x\}$, $\quad S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [\frac{2}{3}, x_0), \; f_1(x) < y < 11-2x\}$ e

$$S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x \in [x_0, \frac{11}{2}], \; 0 < y < 11 - 2x\}.$$

Dalla formula per l'area di una regione compresa tra due grafici otteniamo che

$$\begin{aligned}
\text{Area } S &= \int_0^{\frac{2}{3}} [9 + x - f_1(x)]dx + \int_{\frac{2}{3}}^{x_0} [11 - 2x - f_1(x)]dx + \int_{x_0}^{\frac{11}{2}} [11 - 2x]dx \\
&= \int_0^{x_0} x^3 dx + \int_{\frac{2}{3}}^{x_0} (2 - 3x)dx + \int_{x_0}^{\frac{11}{2}} (11 - 2x)dx = \frac{x_0^4}{4} - \frac{x_0^2}{2} - 9x_0 + \frac{355}{12} \\
&= -\frac{x_0^2}{4} - \frac{27}{4}x_0 + \frac{355}{12}
\end{aligned}$$

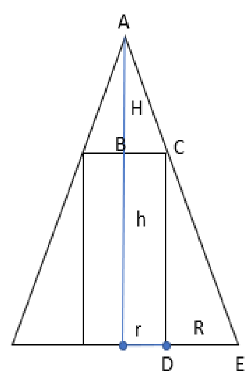
poiché $x_0^3 = x_0 + 9$. Siccome Area $T = \frac{841}{12}$, otteniamo che la probabilitá p cercata è

$$p = \frac{\text{Area } S}{\text{Area } T} = \frac{-3x_0^2 - 81x_0 + 355}{841}.$$

4) La retta normale a Γ_1 in x_0 ha equazione $y = f(x_0) - \frac{x - x_0}{f'(x_0)}$, ed è quindi passante per l'origine se $f(x_0)f'(x_0) + x_0 = 0$. Se f è un polinomio di grado n, f' risulta essere un polinomio di grado $n-1$ e quindi $f(x)f'(x)+x$ è un polinomio di grado $2n-1$. Dal Teorema fondamentale dell'algebra segue che l'equazione $f(x)f'(x) + x = 0$ ha al piú $2n - 1$ soluzioni, provando quanto richiesto.

Questionario

1) Consideriamo il caso in cui la base superiore del cilindro sia tangente alla superficie interna del cono. Fissata l'altezza, questo è il cilindro di volume maggiore inscrivibile nel cono. La figura mostra una sezione verticale dei solidi considerati, con il piano di sezione scelto tra quelli perpendicolari alla base e passanti per il vertice del cono:



Indichiamo con V_1 il volume del cilindro e con V_2 il volume del cono. Dobbiamo verificare che $V_1 < \frac{1}{2}V_2$, ossia $\frac{V_1}{V_2} < \frac{1}{2}$. Cerchiamo il massimo del rapporto tra i volumi e mostriamo che è minore di $\frac{1}{2}$.

Indichiamo con R e H rispettivamente il raggio e l'altezza del cono, e con r e h rispettivamente il

raggio e l'altezza del cilindro.
Consideriamo h come incognita ed esprimiamo il rapporto $\frac{V_1}{V_2}$ in funzione di h. Per la similitudine dei triangoli ABC e CDE si ha $\frac{h}{R-r} = \frac{H-h}{r}$, da cui $r = \frac{R(H-h)}{H}$. Esprimiamo il volume $V_1 = \pi r^2 h$ come $V_1 = \frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h$ e, considerato che $V_2 = \frac{\pi}{3}R^2 H$, determiniamo

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{\pi R^2}{H^2}(H-h)^2 h}{\frac{\pi}{3}R^2 H}$$

ottenendo la funzione

$$f(h) = \frac{V_1}{V_2} = \frac{3(H-h)^2 h}{H^3}.$$

Per derminare i massimi/minimi di $f(h)$ studiamo il segno di $f'(h) = \frac{3}{H^3}(3h^2 - 4hH + H^2)$ per $0 \leq h \leq H$, ottenendo $f'(h) \geq 0$ per $0 \leq h \leq \frac{H}{3}$. Pertanto per $h = \frac{H}{3}$ il rapporto tra i volumi risulta essere massimo e vale

$$f(\frac{H}{3}) = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}.$$

2) Sia p_i la probabilitá che esca i, $i = 1, \ldots, 4$, con un lancio di dado. Siccome $p_1 = 2p_2 = 4p_3 = 8p_4$, abbiamo che $1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = (8+4+2+1)p_4 = 15p_4$, ossia $p_1 = \frac{8}{15}$, $p_2 = \frac{4}{15}$, $p_3 = \frac{2}{15}$ e $p_4 = \frac{1}{15}$. La probabilitá p che escano due numeri uguali su due lanci è

$$p = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 = \frac{17}{45}.$$

3) Esprimiamo il punto P di tangenza come $P(x_0, x_0^3 - 4x_0^2 + 5)$. Calcoliamo la derivata prima di $y = x^3 - 4x^2 + 5$: $y' = 3x^2 - 8x$. Poiché la derivata prima di $y = x^3 - 4x^2 + 5$ nel punto P è uguale al coefficiente angolare della retta tangente, allora $3x_0^2 - 8x_0 = -4$, da cui ricaviamo $x_0 = 2$ e $x_0 = \frac{2}{3}$. I punti di tangenza sono due: $P_1(2, -3)$ e $P_2(\frac{2}{3}, \frac{95}{27})$. Sostituendo le coordinate di P nell'equazione della retta, otteniamo $k = 5$ e $k = \frac{167}{27}$.

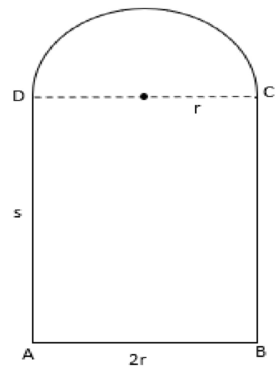
4) Da $5 + e^{-x} - \cos x \geq 4 > 0$ e $\lim_{x \to +\infty}(3x - e^{\sin x}) \geq \lim_{x \to +\infty}(3x - e) = +\infty$ otteniamo che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} = +\infty.$$

Da $\lim_{x \to -\infty} xe^x = \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ otteniamo

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x - e^{\sin x}}{5 + e^{-x} - \cos x} = \lim_{x \to -\infty} xe^x \frac{3 - \frac{e^{\sin x}}{x}}{1 + 5e^x - e^x \cos x} = 0.$$

5) Indichiamo con r il raggio della semicirconferenza e con s una dimensione del rettangolo, come nella seguente figura:



Il perimetro del poligono è dato da: $P = 2s + 2r + \pi r$, e l'area da:

$$A = 2rs + \frac{\pi}{2}r^2. \tag{1}$$

Poniamo il perimetro uguale a 2 per esprimere s in funzione di r: $P = 2$ implica $2s + 2r + \pi r = 2$, ossia $s = 1 - r - \frac{\pi}{2}r$.
Sostituiamo l'espressione trovata di s nella (1) per determinare l'area in funzione di r e poi studiare i massimi/minimi:

$$A(r) = 2r(1 - r - \frac{\pi}{2}r) + \frac{\pi}{2}r^2 = 2r - 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2.$$

Dall'espressione della derivata prima $A'(r) = 2 - 4r - \pi r$ con $r > 0$ determiniamo il punto di massimo: $A'(r) \geq 0$ se e solo se $r \leq \frac{2}{4+\pi}$. Pertanto $AB = \frac{4}{4+\pi}$ e $AD = s = 1 - r - \frac{\pi}{2}r = \frac{2}{4+\pi}$.

6) Determiniamo l'equazione della retta s passante per il punto T e perpendicolare al piano π: tale retta ha come vettore direzionale il vettore normale $n(3, -1, -2)$ del piano π. L'equazione parametrica della retta s è:

$$s : \begin{cases} x = -4 + 3k \\ y = -k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \qquad k \in \mathbb{R}.$$

Il punto d'intersezione tra la retta s con la retta r è il centro della circonferenza S. Risolvendo il sistema

$$\begin{cases} t = -4 + 3k \\ t = -k \\ t = 1 - 2k \end{cases}$$

troviamo che $t = -1$, e pertanto il centro della sfera ha coordinate $C(-1, -1, -1)$.
Determiniamo il raggio della sfera come distanza tra i punti C e T:

$$r = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2 + (z_C - z_T)^2} = \sqrt{14}.$$

L'equazione della sfera si ottiene come

$$(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2 + (z - z_C)^2 = r^2,$$

ossia

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 14.$$

7) Calcoliamo l'integrale ottenendo

$$\int_a^{a+1} (3x^2 + 3)dx = x^3 + 3x\Big|_a^{a+1} = (a + 1)^3 + 3(a + 1) - a^3 - 3a = 3a^2 + 3a + 4.$$

Imponiamo che l'integrale valga 10 risolvendo $3a^2 + 3a - 6 = 0$, che ammette come radici -2 e 1.

8) La probabilitá p_1 che uno dei due giocatori vinca 10 partite di seguito è $p_1 = 2(\frac{1}{2})^{10} = \frac{1}{2^9}$. La probabilitá p_2 che uno dei due giocatori vinca 9 partite su 10 disputate e poi vinca l'11-esima partita è $p_2 = 2 \times 10 \times (\frac{1}{2})^{11} = \frac{5}{2^9}$. La probabilitá p_3 che uno dei due giocatori vinca 9 partite su 11 disputate e poi vinca la 12-esima partita è $p_3 = 2 \times \frac{11 \times 10}{2} \times (\frac{1}{2})^{12} = \frac{55}{2^{11}}$. Quindi la probabilitá p cercata è data da $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{79}{2^{11}}$.

9) Dati i punti $A(3, 1, 0)$, $B(3, -1, 2)$ e $C(1, 1, 2)$, per verificare che il triangolo ABC sia equilatero determiniamo le distanze tra le coppie di punti AB, AC e BC e verifichiamo che siano uguali. Applicando la formula

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

si ottiene che $AB = BC = CA = 2\sqrt{2}$.

Per verificare che il triangolo è contenuto nel piano α di equazione $x + y + z - 4 = 0$, è sufficiente verificare che i tre vertici A, B e C appartengano al piano (per tre punti non allineati passa uno ed un solo piano).

Sostituendo le coordinate del punto A all'equazione del piano α otteniamo $3+1-4 = 0$, ossia $A \in \alpha$. Sostituendo le coordinate dei punti B e C all'equazione del piano α otteniamo $3 - 1 + 2 - 4 = 0$ e $1 + 1 + 2 - 4 = 0$, ossia $B, C \in \alpha$. Determiniamo ora le coordinate del $P(x_P, y_P, z_P)$, quarto vertice del tetraedro regolare, imponendo che: $AP^2 = PB^2 = PC^2$ e $PC = 2\sqrt{2}$, ossia $PC^2 = 8$. Imponendo $AP^2 = PB^2 = PC^2 = 8$ otteniamo il sistema

$$\begin{cases} (x_P - 3)^2 + (y_P - 1)^2 + z_P^2 = (x_P - 3)^2 + (y_P + 1)^2 + (z_P - 2)^2 \\ (x_P - 3)^2 + (y_P - 1)^2 + z_P^2 = (x_P - 1)^2 + (y_P - 1)^2 + (z_P - 2)^2 \\ (x_P - 1)^2 + (y_P - 1)^2 + (z_P - 2)^2 = 8, \end{cases}$$

che ha soluzioni $(x_P, y_P, z_P) = (\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3})$ e $(x_P, y_P, z_P) = (1, -1, 0)$. Abbiamo cosí ottenuto due punti $P_1(\frac{11}{3}, \frac{5}{3}, \frac{8}{3})$ e $P_2(1, -1, 0)$.

10) Determiniamo la derivata prima e seconda di $y(x)$ della funzione data: $y'(x) = 2ke^{kx+2}$ e $y''(x) = 2k^2e^{kx+2}$. Sostituendo nell'equazione differenziale otteniamo che $2(k^2 - 2k - 3)e^{kx+2} = 0$ deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi k deve risolvere l'equazione $k^2 - 2k - 3 = 0$, e quindi otteniamo $k = -1$ e $k = 3$.

Prof. Claudia Di Giulio, Liceo Classico F. Vivona, Roma
Prof. Pierpaolo Esposito, Universitá degli Studi Roma Tre, Roma