

Esame di Stato 2018/19

Soluzione Quesiti seconda prova

Alessandro Gambini¹, Elisa Garagnani², and Giovanni Organtini³

¹Università di Bologna

²Istituto di Istruzione Superiore Archimede

³Sapienza Università di Roma

20 giugno 2019

Quesito 1

Il polinomio al numeratore $p(x)$ è di secondo grado in quanto si annulla in 0 e $12/5$ e ha lo stesso grado del denominatore poiché $f(x)$ ha un asintoto orizzontale $y = 5$. 5 deve essere anche il coefficiente di x^2 del polinomio. Il polinomio al denominatore si deve annullare in -3 e 3 per far sì che ci siano due asintoti verticali di equazione $x = 3$ e $x = -3$ quindi $d = -9$. L'equazione di $f(x)$ è pertanto

$$f(x) = \frac{5x(x - \frac{12}{5})}{x^2 - 9} = \frac{x(5x - 12)}{x^2 - 9}.$$

Per determinare massimi e minimi relativi calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x) = \frac{(10x - 12)(x^2 - 9) - 2x(5x^2 - 12x)}{(x^2 - 9)^2}.$$

Studiamo il segno della derivata:

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 10x^3 - 90x - 12x^2 + 108 - 10x^3 + 24x^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 15x + 18 \geq 0.$$

I punti critici sono pertanto $x_1 = \frac{3}{2}$ e $x_2 = 6$ e dal segno della derivata si deduce che $x_1 = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo relativo e $x_2 = 6$ è un punto di minimo relativo. La funzione non ammette massimi e minimi assoluti.

Quesito 2

Il polinomio si annulla in $x_0 = 0$. Tale punto è l'unico zero del polinomio in quanto

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{1010} (2n-1)x^{2n-2} = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \dots + 2017x^{2016} + 2019x^{2018} > 0$$

in quanto somma di potenze pari di x . La derivata è sempre positiva quindi la funzione $g(x)$ è sempre crescente quindi $x_0 = 0$ è l'unico zero.

Si poteva arrivare alla stessa conclusione anche semplicemente osservando che essendo $g(x)$ somma di potenze dispari avrà lo stesso segno di x pertanto si annulla solo per $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{1,1^x} = 0$$

perché rapporto tra un polinomio e un esponenziale con base maggiore di 1.

Quesito 3

Posto x il lato del quadrato e h l'altro spigolo si ha che la somma degli spigoli vale $8x + 4h$ con la condizione $S = 2x^2 + 4hx$. Ricavando h in funzione di S e x , si ottiene $h = \frac{S - 2x^2}{4x}$. La somma degli spigoli vale

$$f(x) = 8x + \frac{S - 2x^2}{x} = 6x + \frac{S}{x}.$$

Il dominio geometrico della funzione è tale per cui x deve essere un numero reale positivo e l'area del quadrato di base deve essere minore di $S/2$, pertanto

$$x \in \left(0, \sqrt{\frac{S}{2}}\right).$$

L'unico punto critico di $f(x)$ è $x = \sqrt{\frac{S}{6}}$ infatti

$$f'(x) = 6 - \frac{S}{x^2} \quad \text{e} \quad 6x^2 - S = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\frac{S}{6}}.$$

Tale punto è un minimo perchè $f''(x) = \frac{10}{x^3}$ è sempre positiva nel dominio geometrico.

Per tale valore si ottiene che $h = x$, pertanto il parallelepipedo cercato è un cubo.

Quesito 4

L'equazione $\overline{PA} = \sqrt{2}\overline{PB}$ può essere scritta nel modo seguente:

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2(x + 2)^2 + 2(y - 2)^2 + 2(z - 1)^2.$$

Semplificando si ottiene

$$x(x + 12) + y(y - 8) + z(z - 6) + 13 = 0,$$

che è l'equazione di una superficie sferica in quanto può essere riscritta completando i quadrati,

$$(x + 6)^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 48.$$

Si verifica con una semplice sostituzione che $T \in \mathcal{S}$. Dall'equazione cartesiana si deduce il centro della sfera che si trova in $C(-6, 4, 3)$ per cui il piano tangente è il piano passante per T e perpendicolare alla retta che unisce i punti C e T . I coefficienti direttori del piano tangente sono dati da $T - C$:

$$(-10 + 6, 8 - 4, 7 - 3) = (-4, 4, 4),$$

pertanto il piano è $\pi : -4x + 4y + 4z + k = 0$. Il termine noto k si trova imponendo il passaggio per il punto T ricavando $k = -100$. L'equazione finale del piano è $\pi : x - y - z + 25 = 0$

Quesito 5

Il lancio di 4 dadi dà luogo a 6^4 eventi distinti (eventi possibili).

- Per ottenere un numero minore o uguale a 5 si hanno 5 eventi favorevoli:

$$\{1, 1, 1, 1\}, \quad \{1, 1, 1, 2\}, \quad \{1, 1, 2, 1\}, \quad \{1, 2, 1, 1\}, \quad \{2, 1, 1, 1\},$$

quindi la probabilità cercata è $p = \frac{5}{1296}$.

- Il prodotto dei numeri usciti è multiplo di 3 se almeno uno dei numeri è 3 o 6. La probabilità che in **nessuno** dei quattro lanci esca il numero 3 o il numero 6 è $q = \frac{4^4}{6^4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$. La probabilità cercata è quella dell'evento complementare, $p = 1 - q = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}$.
- Il numero di casi che non contengono nè il numero 5 nè il numero 6 è 4^4 . A questi vanno tolti i casi che non contengono il numero 4 che sono 3^4 . La probabilità cercata è pertanto

$$p = \frac{4^4 - 3^4}{6^4} = \frac{175}{1296}.$$

Quesito 6

Per la legge di Lenz, la corrente indotta circola in modo tale da produrre un campo magnetico che si oppone alla variazione di flusso del campo inducente. Quindi, ad esempio, quando l'intensità del campo aumenta, aumenta anche il flusso attraverso la superficie della spira. Se supponiamo che la spira giaccia sul piano del foglio e che il campo magnetico sia entrante nel foglio, la corrente deve circolare in modo da ridurre il flusso e questo si può ottenere producendo un campo magnetico uscente dal foglio. Per la regola della mano destra, dunque, la corrente deve circolare in senso antiorario.

Da 0,0 a 3,0 ms il campo passa da un valore nullo a un valore di $-0,20$ mT. Il valor medio della fem così generata vale quindi

$$V_a = -\frac{\Delta\Phi(\mathbf{B})}{\Delta t} = \frac{S \cdot \Delta B}{\Delta t} = \frac{-0,20 - 0}{3} \times 30 \times 10^{-4} = -0.0002 \text{ V} = -0.2 \text{ mV}.$$

Per il calcolo osserviamo che essendo numeratore e denominatore espressi, rispettivamente, in mT e in ms, non occorre trasformare le unità di misura e che $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$.

Analogamente, nei casi (b) e (c), avremo

$$V_b = \frac{0,20 - (-0,20)}{5,0 - 3,0} \times 30 \times 10^{-4} = 0.0006 \text{ V} = 0.6 \text{ mV}$$

e

$$V_c = \frac{0,00 - 0,20}{10,0 - 5,0} \times 30 \times 10^{-4} = 0.00012 \text{ V} = 0.12 \text{ mV}.$$

Le correnti che circolano nella spira si trovano con la legge di Ohm, dividendo le fem per la resistenza della spira:

$$I_a = \frac{V_a}{R} = -0,05 \text{ A}$$

$$I_b = \frac{V_b}{R} = 0,15 \text{ A}$$

$$I_c = \frac{V_c}{R} = 0,030 \text{ A}$$

Quesito 7

La velocità media nel sistema di riferimento del laboratorio è evidentemente

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0,25}{2,0 \times 10^{-9}} = 1,25 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

La velocità vista dalla navicella si ricava applicando la trasformazione delle velocità di Einstein

$$v'_x = \frac{v_x - v_0}{1 - \frac{v_0}{c^2} v_x}$$

dove $v_0 = 0.80c$ per cui

$$v'_x = \frac{v_x - 0,80c}{1 - \frac{0,80}{c}v_x}.$$

Sapendo che $c = 2,998 \times 10^8$ m/s, si ricava

$$v'_x = \frac{1,25 - 0,80 \times 2,998}{1 - \frac{0,80}{2,998}1,25} \times 10^8 \simeq -1,7 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Gli occupanti della navicella quindi vedono la particella muoversi all'indietro e questo significa che devono muoversi a una velocità superiore rispetto a quella della particella misurata in laboratorio. In effetti, la velocità della navicella nel sistema del laboratorio è l'80% di quella della luce, mentre quella della particella è solo il 42% circa di questa velocità.

Quando per lo sperimentatore nel laboratorio sono trascorsi 2 ns, per chi si trova a bordo della navicella trascorre un tempo pari a

$$t' = \gamma \left(t - \frac{v_0}{c^2}x \right) = 2.22 \text{ ns}.$$

Qui γ è il fattore di Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

La lunghezza percorsa dalla particella, per l'osservatore a bordo della navicella, invece vale

$$x' = \gamma (x - v_0 t) \simeq 0.38 \text{ m}.$$

Si vede facilmente che il rapporto tra x' e t' è in modulo uguale a v'_x .

Quesito 8

Prima di cominciare la soluzione scriviamo i dati in unità del SI. Abbiamo $B = 1,00 \times 10^{-3}$ T, $\Delta x = 0,381$ m e $r = 0,105$ m.

Il protone è una particella carica di carica $q = 1,602 \times 10^{-19}$ C, che, quando si muove in un campo magnetico, subisce la Forza di Lorentz

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}.$$

Il modulo della forza vale

$$F = qvB \sin \theta$$

dove θ è l'angolo formato tra la velocità e il campo magnetico. Questa forza è quella che determina la curvatura della traiettoria del protone per cui, detta m la sua massa, per la seconda Legge di Newton si ha

$$m \frac{(v \sin \theta)^2}{r} = qvB \sin \theta$$

da cui, dopo le semplificazioni,

$$v = \frac{qBr}{m \sin \theta}.$$

Occorre ora determinare $\sin \theta$. Osserviamo che per $\theta = 0$, cioè per velocità parallela al campo, la forza e, di conseguenza, l'accelerazione, è nulla (questo si traduce in un raggio di curvatura infinito). La componente della velocità parallela al campo dunque non cambia mai e la particella si muove di moto rettilineo uniforme per cui

$$\Delta x = v \cos \theta \Delta t.$$

La composizione di questo moto rettilineo uniforme e di quello soggetto all'accelerazione centripeta dovuta alla Forza di Lorentz determina la traiettoria a forma di elica di cui conosciamo il passo che è la distanza percorsa in un giro completo. Poiché il modulo della velocità non cambia possiamo scrivere che

$$v \sin \theta = \frac{2\pi r}{T}$$

dove T è il tempo impiegato a compiere un giro e dunque

$$\Delta x = v \cos \theta T = \cancel{v} \cos \theta \frac{2\pi r}{\cancel{v} \sin \theta} = \frac{2\pi r}{\tan \theta}.$$

Da quest'equazione ricaviamo così

$$\tan \theta = \frac{2\pi r}{\Delta x} = \frac{2\pi \times 0,105}{0,381} \simeq 1,732$$

che corrisponde a un angolo di circa 60 gradi. Possiamo quindi concludere che

$$v = \frac{qBr}{m \sin 60^\circ} = 1,16 \times 10^4 \text{ m/s}$$